图像的点运算

图像的点运算是图像处理中相对简单的技术，它主要用于改变一幅图像的灰度分布范围。点运算通过一个变换函数将图像的像素一一转换，最终构成一幅新的图像。由于操作对象是图像的一个个像素，故得名为“点运算”。点运算的最大特点是输出像素值只与当前输入像素值有关。点运算的图像处理过程可以用以下公式表示：G(x,y)=T[f(x,y)]

其中 f(x,y)表示输入图像， g(x,y)表示处理后的图像。函数 T 是对 f 的一种变换操作，在这里它表示灰度变换公式。可以看到，对点运算而言，最重要的是确定灰度变换公式。变换公式一旦确定，点运算对于图像的处理效果就确定了。在此处**点运算研究的内容**主要包括**灰度直方图、线性变换、非线性变换、阈值变换、灰度拉伸及灰度均衡**等。

点运算（point operation）定义

对于一幅输入图像，将产生一幅输出图像，输出图像的每个像素点的灰度值由输入像素点决定。点运算由灰度变换函数（gray-scale transformation, GST）确定。

Notice：

（1）与局部（邻域）运算的差别，输入像素-输出像素一一对应；

（1）与几何运算的差别，不改变图像的空间关系；

（2）又称为对比度增强，对比度拉伸或灰度变换。

一、灰度直方图

定义：灰度直方图是灰度值的函数，描述的是图像中该灰度值的像素个数。其横坐标表示像素的灰度值，纵坐标表示该灰度值在图像中出现的频率（或者像素的个数）。

有时候只想得到指定灰度范围内的直方图，比如 L 到 H 之间的绘图直方图，则只需要计算 L 到 H 之间的各个灰度值的出现频率。

任何一幅图像都包含着丰富的图像信息，对于图像处理而言，如何提取这些信息并找出其中的特征就显得十分关键。灰度直方图（Histogram）直观地显示图像灰度分布的情况，这些信息在图像灰度变换等处理过程中显得十分重要。

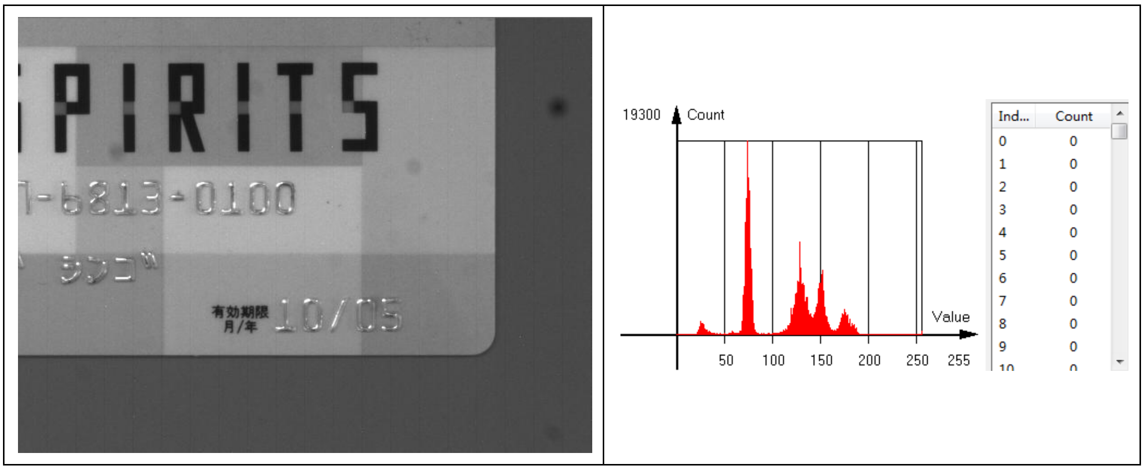


图 1 Histogram 灰度直方图

如图 1 显示一幅灰度图以及它所对应的灰度直方图。可以看到，灰度直方图是一个二维图。从数学上来说，它描绘了图像各个灰度值的统计特性，显示了各个灰度级出现的次数或概率。从图形上来说，其横坐标表示图像的灰度值，取值范围是 0 到 255。其纵坐标则通过高度来表示出现次数的多少或者高率的高低。

灰度直方图的**基本思想是统计**，对于拥有 256 种灰度的图像的统计。

二、灰度线性变换

灰度线性变换是灰度变换的一种，图像的灰度变换是通过建立灰度映射来调整源图像的灰度从而达到图像增强的目的。灰度映射通常是用灰度变换曲线来表示的。

灰度线性变换就是将图像的像素值通过指定的线性函数进行变换，以此增强或者减弱图像的灰度。灰度线性变换的公式就是常见的一维线性函数：

GST 函数（gray-scale transformation, GST）函数 f(D)为线性，即

$$D_B = f(D_A) = \alpha D_A + b$$

显然，

***若 a＝1，b＝0，图像像素不发生变化；**

***若 a＝1，b≠0，图像所有灰度值上移或者下移；(b>0 增加亮度，b<0 减少亮度)**

***若 a>1，输出图像的对比度增强；(|a|>1 时增加对比度，|a|<1 时减少对比度)**

***若 0<a<1，输出图像对比度减小；(|a|>1 时增加对比度，|a|<1 时减少对比度)**

***若 a<0，暗区域变亮，亮区域变暗，图像求补。**

(1) 当 a=1 时

这种情况常用于调节图像的亮度。亮度的调节就是让图像的各像素值增加或者减少一定量。这种情况下可以通过改变 b 值达到增加或者减少图像的亮度。见图 2 所示。

lenna.bmp

$$D_B = D_A + 50$$

图 2 a=1 时改变 b 值的效果图

(2)当 a>1 时

此时可用于增加图像的对比度。图像的像素值在变换后全部增大，整体显示效果被增强,见图 3 所示

lenna.bmp

$$D_B = 1.5 \times D_A$$

图 2 a>1 时效果图

(3)当 0<a<1 时

效果与 a>1 时刚刚相反，图像的对比度和整体效果都被削弱,见图 4 所示

lenna.bmp

$$D_B = 0.8 \times D_A$$

图 4　0<a<1 时的图像效果

当 a 值越小时，图像的灰度分布范围越窄，图像看起来也就越偏灰色。

(4)当 a<0 时

在这种情况下，源图像较亮的区域变暗，而较暗的区域会变亮。此时可以使函数种的 a=-1,d=255 让图像实现反色效果，见图 5 所示

lenna.bmp

$$D_B = -1 \times D_A + 255$$

图 5 a<0 时的图像效果

a<0 时的效果，如 Invert 算法一样，见图 6 所示:

	
原图	Invert 反相后效果图

图 6 a<0 处理效果图

三、灰度非线性变换

1、灰度对数变换

对数变换的基本形式为：

$$y = a + \frac{\log(1+x)}{b}$$

其中 a 控制曲线的垂直偏移量；b 为正常数，控制曲线的弯曲程度，其取值对函数曲线的影响如图 7 所示。

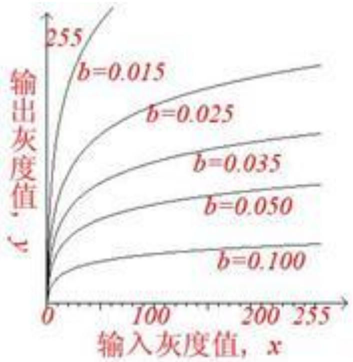


图 7 对于各种 b 值，式的曲线

对数变换实现了图像灰度扩展和压缩的功能。它扩展低灰度值而压缩高灰度值，让图像的灰度分布更加符合人的视觉特征。图 8 显示了经过对数变换的图像。

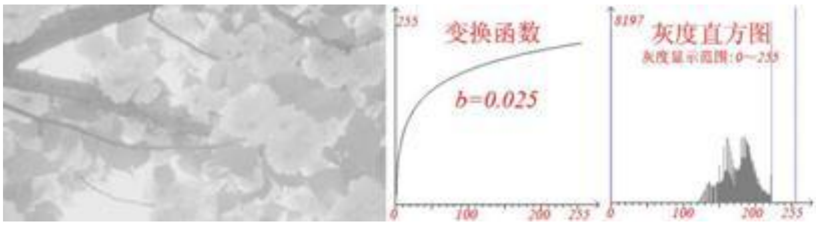


图 8 经过对数变换后的图像及其信息

从直方图上可以看到高灰度值已经被压缩了，而低灰度值则扩大了覆盖区域。

2、灰度幂次变换

幂次变换的基本表达式为：

$$y = cx^r + b$$

其中 c、r 均为正数。与对数变换相同，幂次变换将部分灰度区域映射到更宽的区域中。当 r=1 时，幂次变换转变为线性变换。图 9 显示了各种 r 值对幂次函数曲线的影响（c=0.1）。

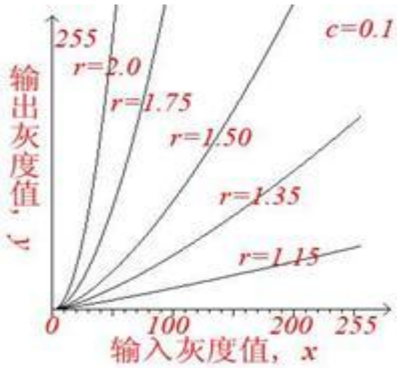


图 9　对于各种 r 值，式 $y=0.1x^r$ 的曲线

可以看到，输出灰度值会随着指数的增加迅速扩大。当指数稍大时（例如 r≥2），整个变换曲线趋近于一条垂直线。此时原始图像中的绝大部分灰度值经过变换后会变成最大值，产生的图像几乎全黑，失去了非线性变换的意义。在实际运用中经常对基本表达式的 x 和 y 进行约束，让它们的取值范围在 0～1 之间。

下面修改幂次变化公式使 x 与 y 的取值范围都在 0～255 之间。

对于各种 r 值，上式的曲线图如图 10 所示。

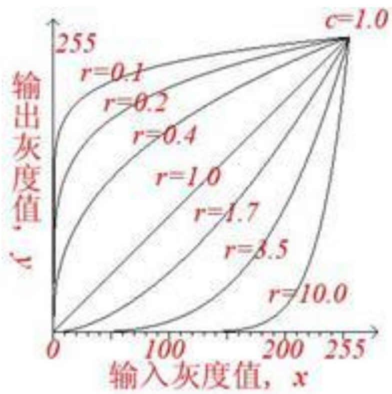


图 10　修改后的幂次变换函数曲线

图 10 十分直观地表明了以下关系。

- 当 r<0 时，变换函数曲线在正比函数上方。此时扩展低灰度级，压缩高灰度级，使图像变亮。这一点与对数变换十分相似。
- 当 r>0 时，变换函数曲线在正比函数下方。此时扩展高灰度级，压缩低灰度级，使图像变暗。

幂次变换常用于显示设备的伽马校正中。目前几乎所有的 CRT 显示设备 、摄影胶片和许多电子照相机的光电转换特性都是非线性的，也就是说设备显示的图像效果没有完全还原原始图像，它们之间存在一个幂次的关系：

$$output = input^{\gamma}$$

例如显象管显示器有一个电压与光强度的响应装置，它负责将电信号转变为光信号输出。正如前面介绍的一样，这个装置转换特征是一个指数变化范围为 1.8～2.5 的幂函数。所

以真实显示的图像要比原始图像暗，如图 11 所示。

图 11　输出图像与原始图像的差别（γ=2.5）

为了精确显示图像，常常在显示前对图像进行伽马校正，即在显示之前通过幂次变换将图像进行修正。整个过程利用公式表示如下：

$$output = (T(input))^{\gamma} = (input^{\frac{1}{\gamma}})^{\gamma} = input$$

可得出伽马校正函数：

$$T(x) = x^{\frac{1}{\gamma}}$$

其中 γ 表示显示设备转换特征方程的指数。图 12 经过伽马校正后的效果如图 12 所示。

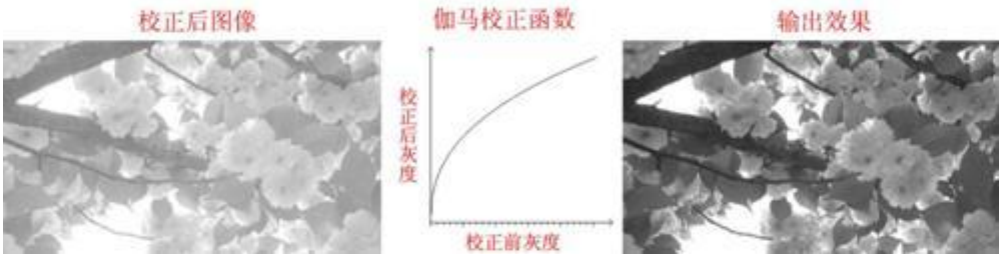


图 12　经过伽马校正后的图像效果

可以看到，经过伽马校正后的图像已经与实际图像十分接近。如果涉及到图像的精确显示，伽马校正是十分重要的。

3、灰度指数变换

指数变换的基本表达式为：

$$y = b^{c(x-a)} - 1$$

其中参数 b、c 控制曲线形状，参数 a 控制曲线的左右位置。指数变换的曲线如图 13 所示。

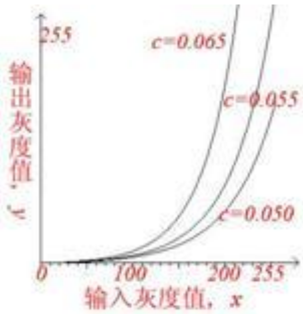


图 13　不同 c 值对指数变换函数曲线的影响（a=0，b=1.5）

指数变换的作用是扩展图像的高灰度级、压缩低灰度级。虽然幂次变换也有这个功能，但是图像经过指数变换后对比度更高，高灰度级也被扩展到了更宽的范围，如图 14 所示。

图 14　指数变换前后图像的对比

四、灰度阈值变换

阈值(Threshold)，又称为临界值，它目的是要确定出一个范围，然后在这个范围内的部分使用同一种方法处理，而阈值之外的部分则使用另一种处理方法或者保持原样。

灰度的阈值变换可以让一幅图像变成黑白二值图，其表达式为：

$$y=\begin{cases}0(x<T)\\255(x\geq T)\end{cases}$$

其中 T 为阈值，如果图像的像素值小于阈值，则变换后该点的灰度值为 0，反之则为 255。阈值变换的效果如图 15 所示。

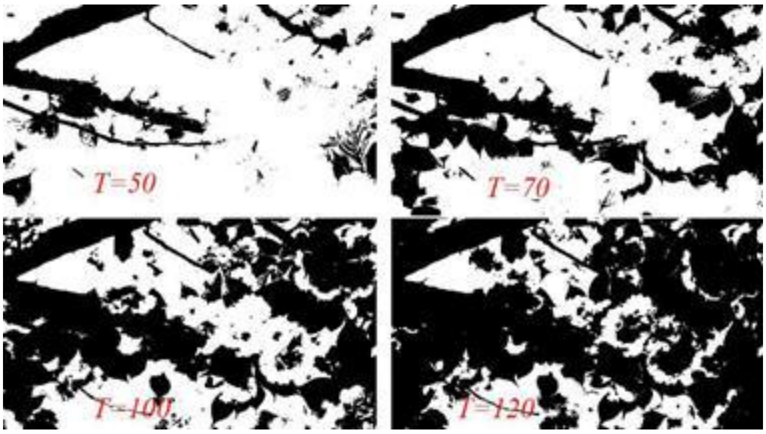


图 15 灰度阈值变换

阈值变换在生物学上的运用较为广泛，常用于细胞图像分割等。

五、灰度拉伸

由于环境光线或采集设备等原因，图像的灰度有时会集中于某一较小区间，如图像过亮或过暗等，这时就需要对图像的灰度进行拉伸使之覆盖较大的取值区间，从而提高图像的对比度以便于观察。这种处理就可以利用线性变换曲线建立灰度映射来完成。

灰度拉伸又叫做对比度拉伸，它与线性变换有些类似，不同之处在于灰度拉伸使用的是分段线性变换，所以它最大的优势是变换函数可以由用户任意合成。灰度拉伸的公式为：

$$y=\begin{cases}\dfrac{y1}{x1}x，\text{此时}(x<x1)\\ \dfrac{y2-y1}{x2-x1}(x-x1)+y1，\text{此时}x1<x<x2\\ \dfrac{255-y2}{255-x2}(x-x2)+y2，\text{此时}x>x2\end{cases}$$

其变换函数的图形如图 16 所示。

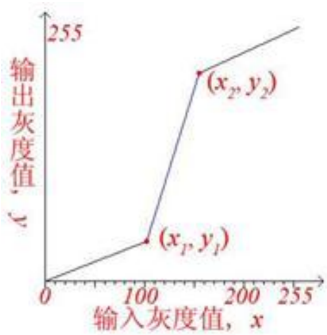


图 16　灰度拉伸函数的图形

可见，灰度拉伸需要指定两个控制点，它们用于控制灰度拉伸变换函数的图形。一般情况下有 x2≥x1, y2≥y1 成立。正如其名，灰度拉伸常用于扩展指定灰度范围，以改善图像质量。接下来通过讨论控制点来分析灰度拉伸的作用。

1) $\dfrac{y2-y1}{x2-x1}>1$

即中间线段的斜率大于 1，如果一幅图像对比度较低，就可以利用这类控制点对图像进行对比度拉伸，如图 17 所示。

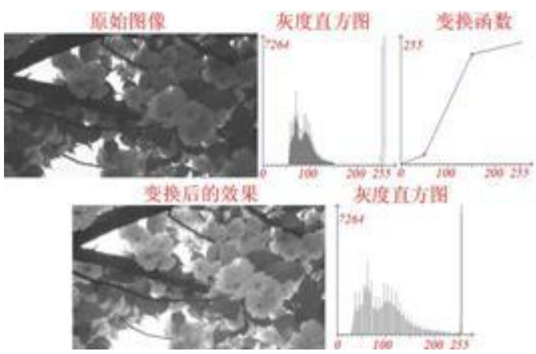


图 17　利用灰度拉伸增加图像的对比度

从图 17 中可以明显发现原始图像的对比度较低，其灰度分布主要集中在 50～150 的范围内。经过（50, 20）、（150, 230）两个控制点的灰度拉伸变换后，灰度分布范围被拉伸了，达到了 20～230，图像的对比度大大增加，整体显示效果得到加强。

2） $\dfrac{y2-y1}{x2-x1}<1$

即中间线段的斜率小于 1，作用与上一条刚好相反，用于降低图像的对比度，如图 18 所示。

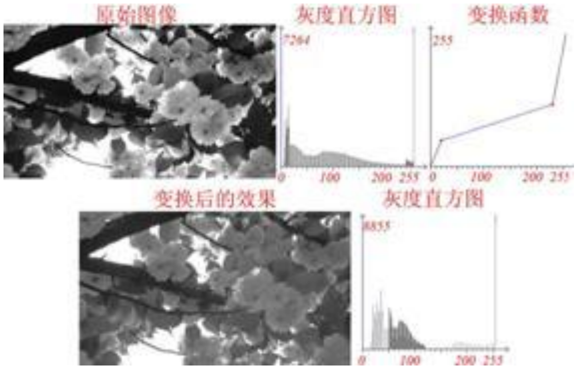


图 18　利用灰度拉伸降低图像的对比度

图 18 中的原始图像对比度较高，但是经过控制点为(20, 50)、(230, 120)的灰度拉伸后，图像的灰度分布基本被压缩在 50～120 之间。变换后的图像对比度降低，整体画面偏灰色。

3） $\dfrac{y2-y1}{x2-x1}=1$

此时变换函数变化为一条线性函数，它将产生一个没有变化的图像。

4） $x2=x1, y1=0, y2=255$

这也是一种特殊情况，此时变换函数变为阈值函数，产生二值图像，效果见灰度阈值变换图。

六、灰度均衡

灰度均衡是以累计分布函数变换为基础的直方图修正法，它可以产生一幅灰度级分布概率均匀的图像。**也就是说，经过灰度均衡后的图像在每一级灰度上都具有相同数量的像素点**，对应灰度直方图的每一级灰度具有相同的高度。灰度均衡同样也属于改进图像的方法，灰度均衡后的图像具有最大的信息量。

图 19 显示了高亮度和低对比度图像经过灰度均衡后的效果，可以看到灰度均衡对图像效果进行了重要的改进。从变换后图像的直方图来看，灰度分布更加均匀。

下面进行灰度均衡变换函数的推导。

设转换前图像的密度函数为 pr(r)，其中 0≤r≤1；转化后图像的密度函数为 ps(s)，同样有 0≤s≤1；灰度均衡变换函数为 s=T(r)。从概率理论可以得到如下公式：

$$P_s(s) = P_r(r)\frac{dr}{ds}$$

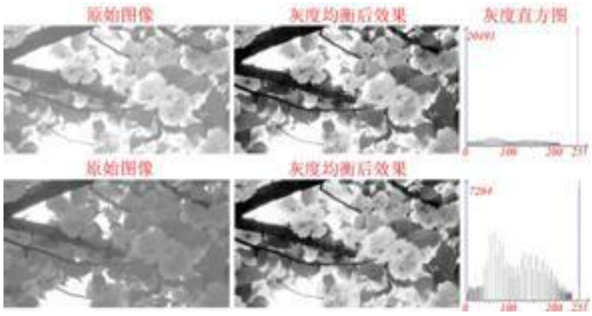


图 19　利用灰度均衡处理图像

转化后图像灰度均匀分布，有 ps(s)=1，故：

$$ds = p_r(r)dr$$

两边取积分有：

$$s = T(r) = \int_0^r P_r(t)dt$$

这就是图像的累计分布函数。对于图像而言，密度函数为：

$$p(x) = \frac{n_x}{n}$$

其中 x 表示灰度值，nx 表示灰度级为 x 的像素个数，n 表示图像总像素个数。

通过上面的公式就能推导出基于离散型的灰度均衡公式：

$$y = 255\sum_{i=0}^{x} p(i) = 255\sum_{i=0}^{x}\frac{n_i}{n}$$

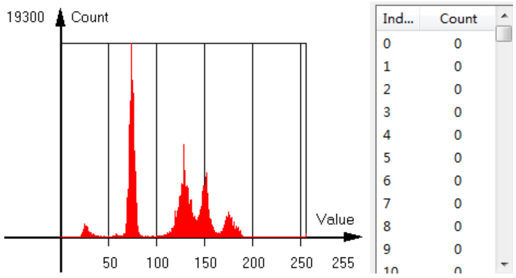
其中 y 的取值范围是 0 至 255。

直方图均衡化（Histogram Equalization）

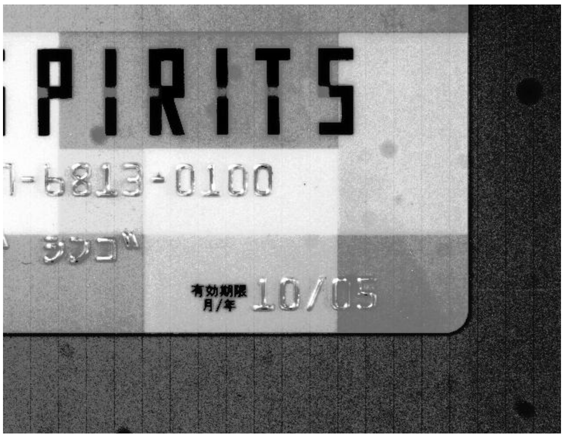
直方图均衡化实质上是对图像进行非线性拉伸，重新分配图像像元值，使一定灰度范围内的像元数量大致相同。这样，原来直方图中间的峰顶部分对比度得到增强，而两侧的谷底部分对比度降低，输出图像的直方图是一较平的分段直方图。

注意：认真对比直方图均衡化前后的图像差别，仔细观察直方图均衡化的效果。

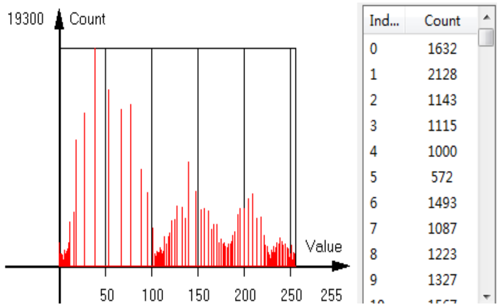
原图



直方图



均衡化后效果图



均衡化后直方图

“Histogram Equaliza”后的看其直方图比较效果